ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДРОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ РАБОТНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО ТЕЛА С ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКОЙ

APPLICATION OF RABOTNOV FRACTIONAL OPERATORS FOR THE ANALYSIS OF IMPACT RESPONSE OF A VISCOELASTIC BEAM

Ю.А.Россихин[1], **М.В.Шитикова**[1] – д.физ.-мат.н., **И.И.Попов**[1,2] – асп.
[1]Воронежский ГАСУ, Воронеж, Россия, [2]NTUST, Taipei, Taiwan
yar@vgasu.vrn.ru , mvs@vgasu@vrn.ru , 89042149140@mail.ru

Abstract. The problem of dynamic contact interaction of a viscoelastic beam with an elastic sphere is considered when viscoelastic features of a target are described via viscoelastic operators involving dimensionless Rabotnov fractional operators. The contact force is defined by the Hertz's contact law, where the stiffness operator is determined under the assumption that the bulk modulus is a constant value, while Poisson's coefficient is time-dependent. The nonlinear operator equation for defining the contact force is obtained, which could be solved numerically.

Рассмотрим задачу об ударе упругого шара по вязкоупругой балке Бернулли-Эйлера. Предположим, что шар движется со скоростью v_0 навстречу балке и нормальный удар происходит при $t=0$ в ее центре. Уравнения движения шара и балки имеют вид

$$m\ddot{w}_2=-P(t), \tag{1}$$

$$\tilde{E}I\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+\rho A\ddot{w}_1=P(t)\delta\left(x-\frac{L}{2}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{E}$ - некоторый оператор, L, A и I - длина, площадь и момент инерции сечения балки, ρ - плотность, w_1 - перемещение балки в точке контакта, w_2 перемещение шара массы m, $P(t)$ - контактная сила, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, точки над величинами обозначают производные по времени.

Уравнения (1) и (2) должны быть проинтегрированы при начальных условиях

$$w_2\,|_{t=0}=0, \quad \dot{w}_2\,|_{t=0}=v_0, \qquad w_1\,|_{t=0}=\dot{w}_1\,|_{t=0}=0, \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (1), находим

$$w_2(t)=-\frac{1}{m}\int_0^t P(t')(t-t')dt'+v_0 t. \tag{4}$$

Решение уравнения (2) для шарнирно-опертой балки ищем в виде

$$w_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (2) и учитывая ортогональность $\sin\ n\pi x/L$ на отрезке от 0 до L, имеем

$$\ddot{T}_n(t)+\Omega_n^2\tilde{E}T_n(t)=F_nP(t), \tag{6}$$

где $\Omega_n^2=\dfrac{E_1I}{\rho A}\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^4$, $F_n=\dfrac{2}{\rho AL}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, E_1 - упругий модуль.

В работе [1] показано, что для безразмерного оператора Работнова, который будет использоваться далее, функция Грина $G_n(t)$ имеет вид

$$G_n(t)=A_{0n}(t)+A_ne^{-\alpha_n t}\sin\ \omega_n t-\varphi_n\ , \tag{7}$$

где функция $A_{0n}(t)$ описывает дрейф положения равновесия, а второе слагаемое отвечает за колебания вокруг дрейфующего положения равновесия с амплитудой A_n, частотой ω_n и коэффициентом затухания α_n.

Зная функцию $G_n(t)$, решение уравнения (2) имеет вид

$$w_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\int_0^t G_n(t-t')P(t')dt'. \tag{8}$$

Контактная сила $P(t)$ определяется по формуле Герца

$$P(t) = ky^{3/2}, \tag{9}$$

где $k = 4\sqrt{R}E^* / 3,\ R$ - радиус кривизны шара, величина

$$y(t) = w_2(t) - w_1\ \ L/2, t \tag{10}$$

характеризует местное смятие контактирующих материалов шара и балки, а оператор E^* - определяется по принципу Вольтерра

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} + \frac{1-\tilde{\nu}_1^2}{\tilde{E}_1}, \tag{11}$$

ν_2 и E_2 - постоянные коэффициенты Пуассона и модуль Юнга соответственно для упругого шара, $\tilde{\nu}_1$ и $\tilde{E}_1$ - операторы для вязкоупругой балки.

Предположим, что оператор $\tilde{E}_1$ соответствует модели стандартного линейного тела с дробными производными [1]

$$\tilde{E}_1 = E_\infty\left[1 - \nu_\varepsilon Э_\gamma^*\ \ \tau_\varepsilon^\gamma\ \ \right] \tag{12}$$

где E_∞ - нерелаксированный модуль, $Э_\gamma^*\ \ \tau_\varepsilon^\gamma\ \ = \left[1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma\right]^{-1}$ - безразмерный дробный оператор Работнова [1], D^γ - дробная производная Римана-Лиувилля порядка $0 < \gamma < 1$, τ_ε - время релаксации, $\nu_\varepsilon = (E_\infty - E_0)/E_\infty$, E_0 - релаксированный модуль.

Предполагая далее, что оператор объемного модуля является константой, т.е. $\tilde{E}_1/(1-2\tilde{\nu}_1) = E_\infty/(1-2\nu_\infty),$ с учетом соотношения (12) находим

$$\tilde{\nu}_1 = \nu_\infty + \tfrac{1}{2}(1-2\nu_\infty)\nu_\infty Э_\gamma^*\ \ \tau_\varepsilon^\gamma\ \ . \tag{13}$$

Подставляя (10) в соотношение (9) с учетом (4), (8) и (11)-(13) и используя теорему о произведении операторов Работнова, приходим к нелинейному операторному уравнению для определения контактной силы

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{R}}\right)^{2/3}\left[\left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2} + \frac{1-\nu_\infty^2}{E_\infty}\right)P(t) + \frac{\nu_\varepsilon(1-2\nu_\infty)^2}{4E_\infty}\int_0^t Э_\gamma\left(-\frac{t-t'}{\tau_\varepsilon}\right)P(t')dt' + \frac{3\nu_\varepsilon}{4E_0}\int_0^t Э_\gamma\left(-\frac{t-t'}{\tau_\sigma}\right)P(t')dt'\right]^{2/3}$$

$$= -\frac{1}{m}\int_0^t P(t')dt' + v_0 t - \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\int_0^t G_n(t-t')P(t')dt'$$

Заметим, что эту задачу можно было бы легко обобщить на случай удара вязкоупругого шара по вязкоупругой балке. Для этого необходимо величину $(1-\nu_2^2)E_2^{-1}$ заменить на оператор с вязкоупругими характеристиками (12) и (13), соответствующими материалу шара.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No.14-08-92008-ННС-а, и Национального научного фонда Тайваня, грант NSC 103-2923-E-011-002-MY3.

Литература

1. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Two approaches for studying the impact response of viscoelastic engineering systems: An overview//Computers and Mathematics with Applications. 2013, Vol.66, p. 755-773.